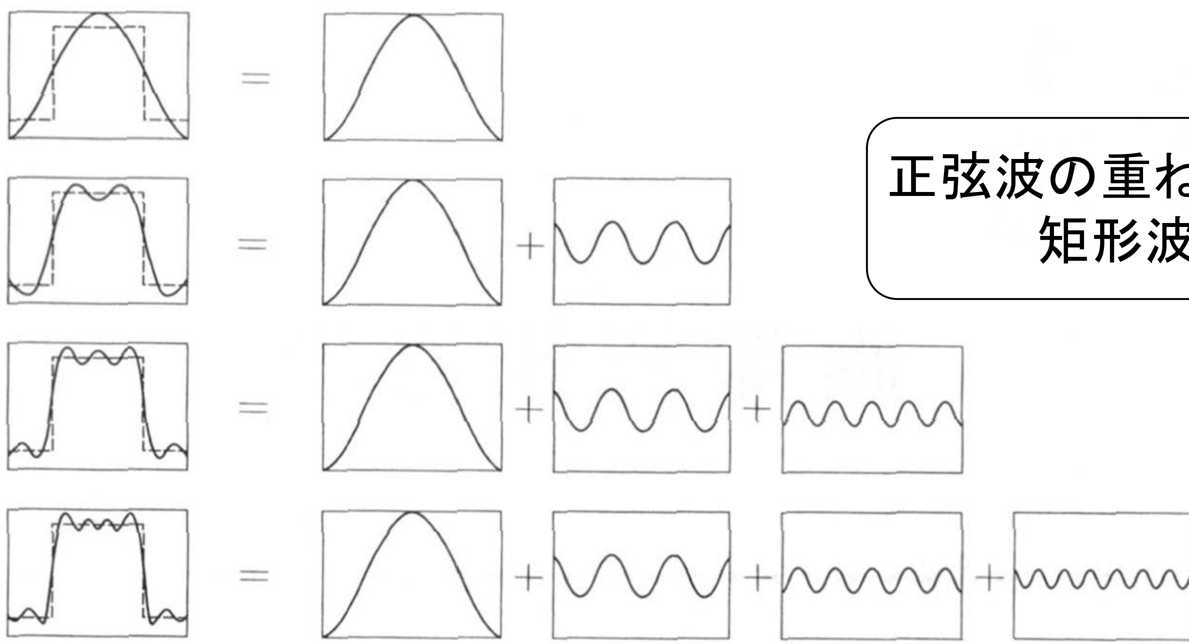
画像処理工学

画像の空間周波数解析

フーリエ変換の基本概念

- 信号波形のフーリエ変換
  - 信号波形を周波数の異なる三角関数（正弦波など）に分解する
  - 逆に，周波数の異なる三角関数を重ねあわせることにより，任意の信号波形を合成できる



正弦波の重ね合わせによる矩形波の表現

フーリエ変換の基本概念

- フーリエ変換
  - 1次元信号 $f(t)$ のフーリエ変換

変換　$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}dt \qquad \because e^{-j\omega t}=\cos(\omega t)-j\sin(\omega t)$

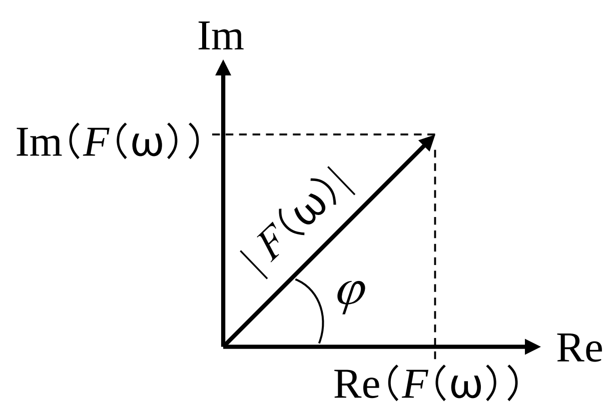
逆変換　$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{j\omega t}d\omega \qquad \because e^{j\omega t}=\cos(\omega t)+j\sin(\omega t)$

F(ω) は複素数となるので

F(ω) の実数部を Re(F(ω))，虚数部を Im(F(ω))

とすると

$$F(\omega)=\mathrm{Re}\left(F(\omega)\right)+\mathrm{Im}\left(F(\omega)\right)$$



として，複素平面上のベクトルで表現できる

フーリエ変換の基本概念

信号 $f(t)$ は
周波数ωの複素正弦波に
分解できることを意味する

- フーリエ変換
  - 振幅スペクトル
    - $f(t)$に含まれる周波数ωの複素正弦波の振幅

$$\left|F(\omega)\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\left(F(\omega)\right)^2 + \mathrm{Im}\left(F(\omega)\right)^2}$$

  - 位相スペクトル
    - $f(t)$に含まれる周波数ωの複素正弦波の初期位相

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\left(F(\omega)\right)}{\mathrm{Re}\left(F(\omega)\right)}\right\}$$

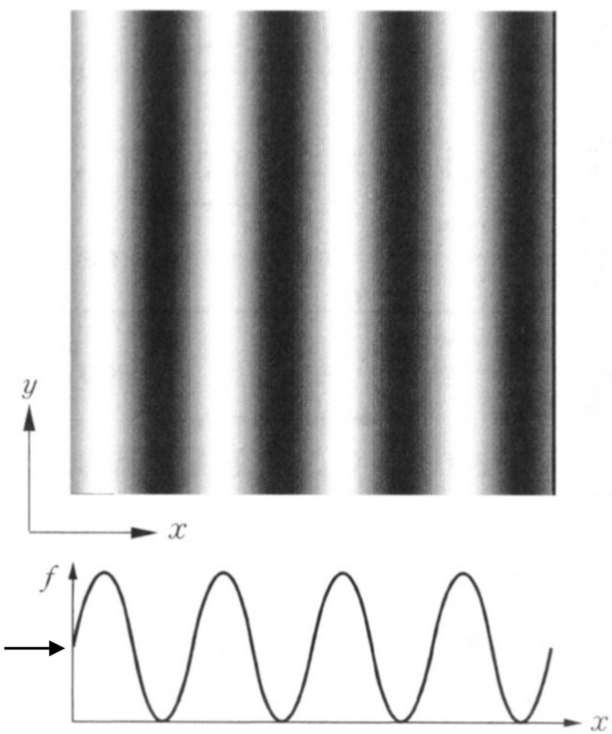
  - パワースペクトル
    - $f(t)$に各周波数成分がどの程度の強さで含まれるか

$$\left|F(\omega)\right|^2 = \mathrm{Re}\left(F(\omega)\right)^2 + \mathrm{Im}\left(F(\omega)\right)^2$$

画像の空間周波数

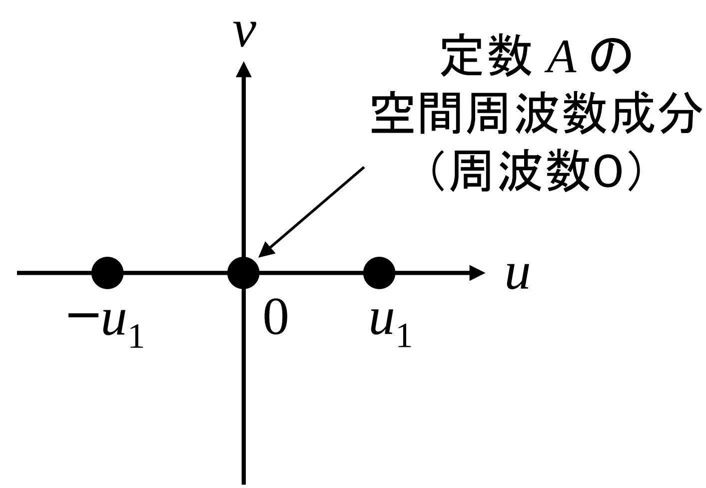
- 画像の空間周波数
  - 画像信号では，単位長に存在する濃淡の縞模様の数で周波数（空間周波数）が定義される

周波数 u の正弦波



$f(x, y) = A\sin u_1 x + A$ の画像

フーリエ変換

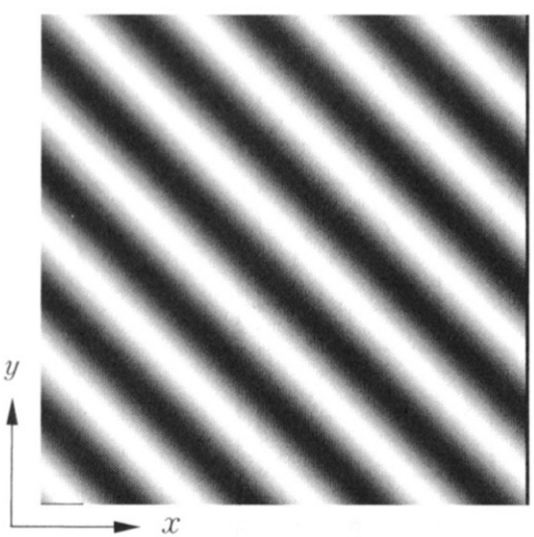


空間周波数領域での表現

x 軸方向にのみ
濃淡変化（縞模様）がある場合

画像の空間周波数

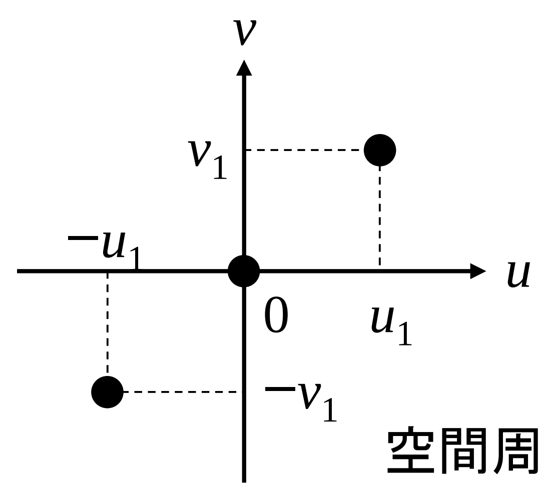
- 空間周波数が表す特徴
  - 空間周波数が低いと濃淡変化が滑らか（縞模様の数が少ない）
  - 空間周波数が高いと濃淡変換が激しい（縞模様の数が多い）



$$f(x,\ y)\ =\ A\sin\left(u_1 x + v_1 y\right)\ +\ A$$

の画像

フーリエ変換

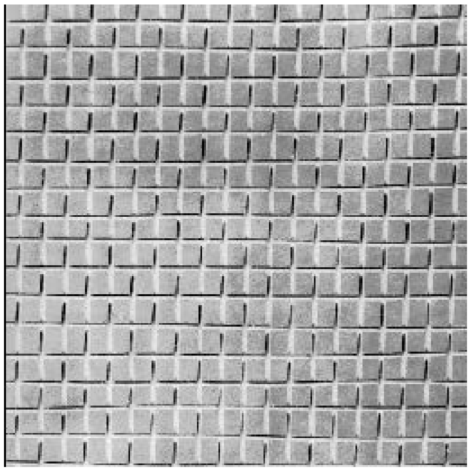


空間周波数領域

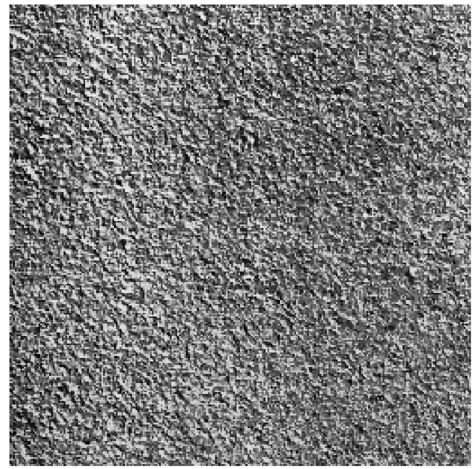
x 軸および y 軸方向にのみ濃淡変化（縞模様）がある場合

テクスチャパターンの空間周波数

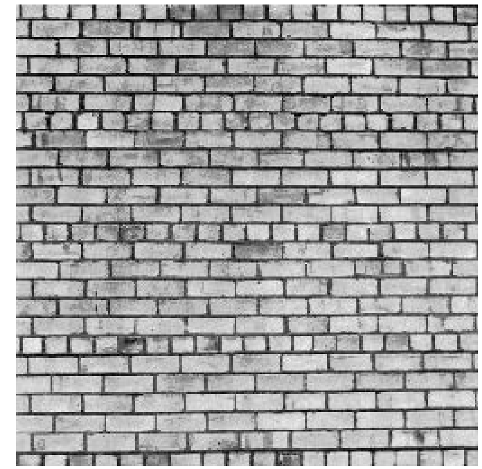
- テクスチャの例



タイル

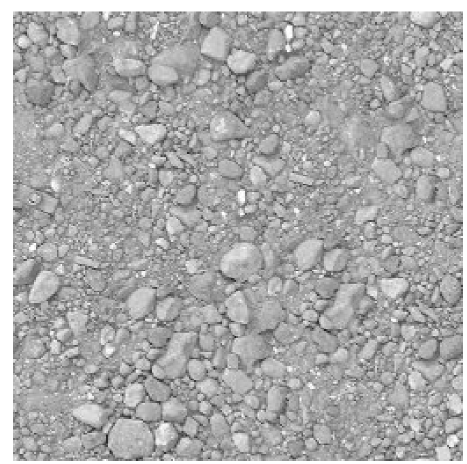


コンクリート



レンガ

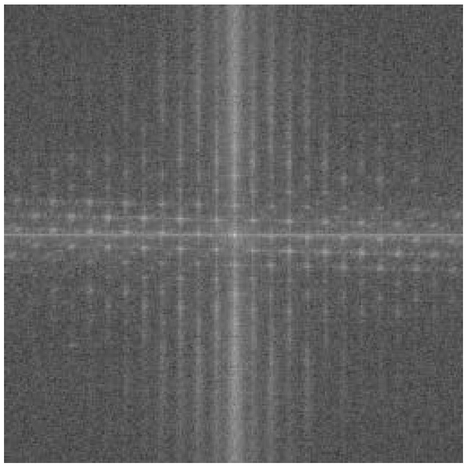
木目

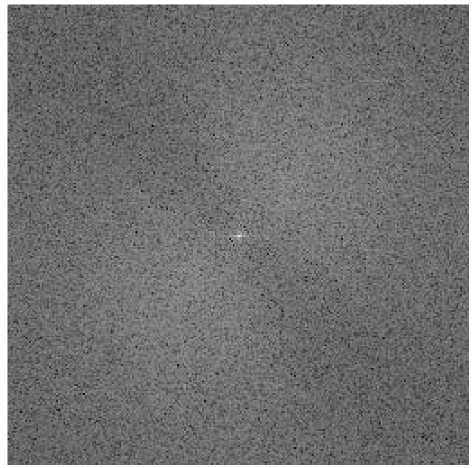


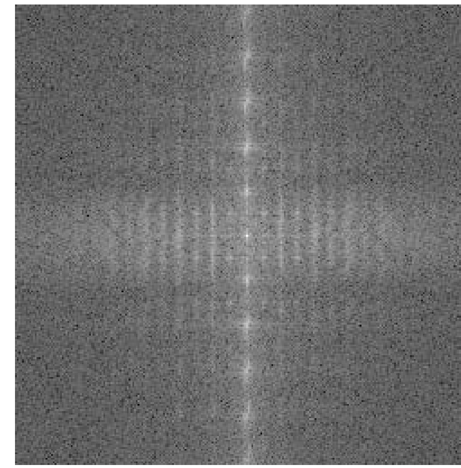
砂利

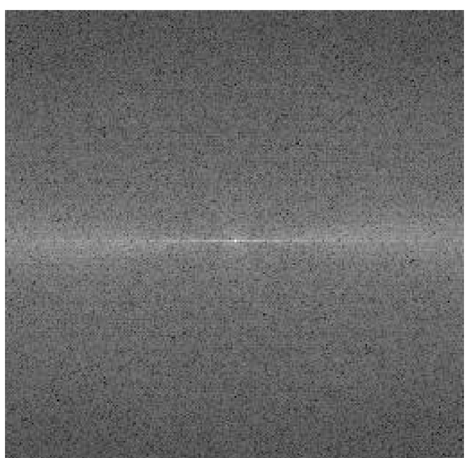
テクスチャパターンの空間周波数

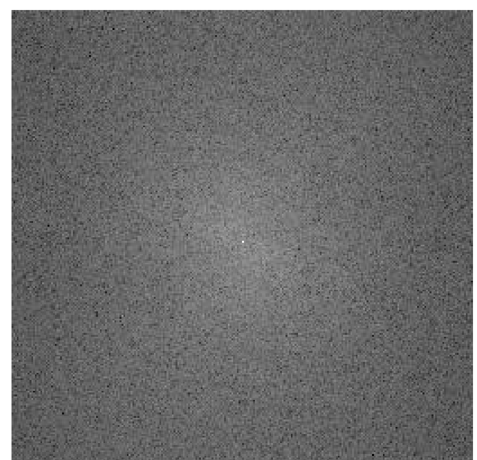
- テクスチャのフーリエパワースペクトル


タイル


コンクリート


レンガ


木目


砂利

画像のフーリエ変換

- $M \times N$ の画像データ $f(x, y)$ の離散フーリエ変換

変換（DFT）

$$F(k, l) = \underbrace{\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}}_{\text{有限データの変換}} f(x, y)\, {W_M}^{xk}\ {W_N}^{yl}$$

$$\because W_M = e^{-2j\pi/M}, W_N = e^{-2j\pi/N}$$

逆変換（IDFT）

$$f(x, \mathrm{y}) = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} F(k, \mathrm{l})\, {W_M}^{-xk}\ {W_N}^{-yl}$$

$$\because W_M = e^{2j\pi/M}, W_N = e^{2j\pi/N}$$

パワースペクトル

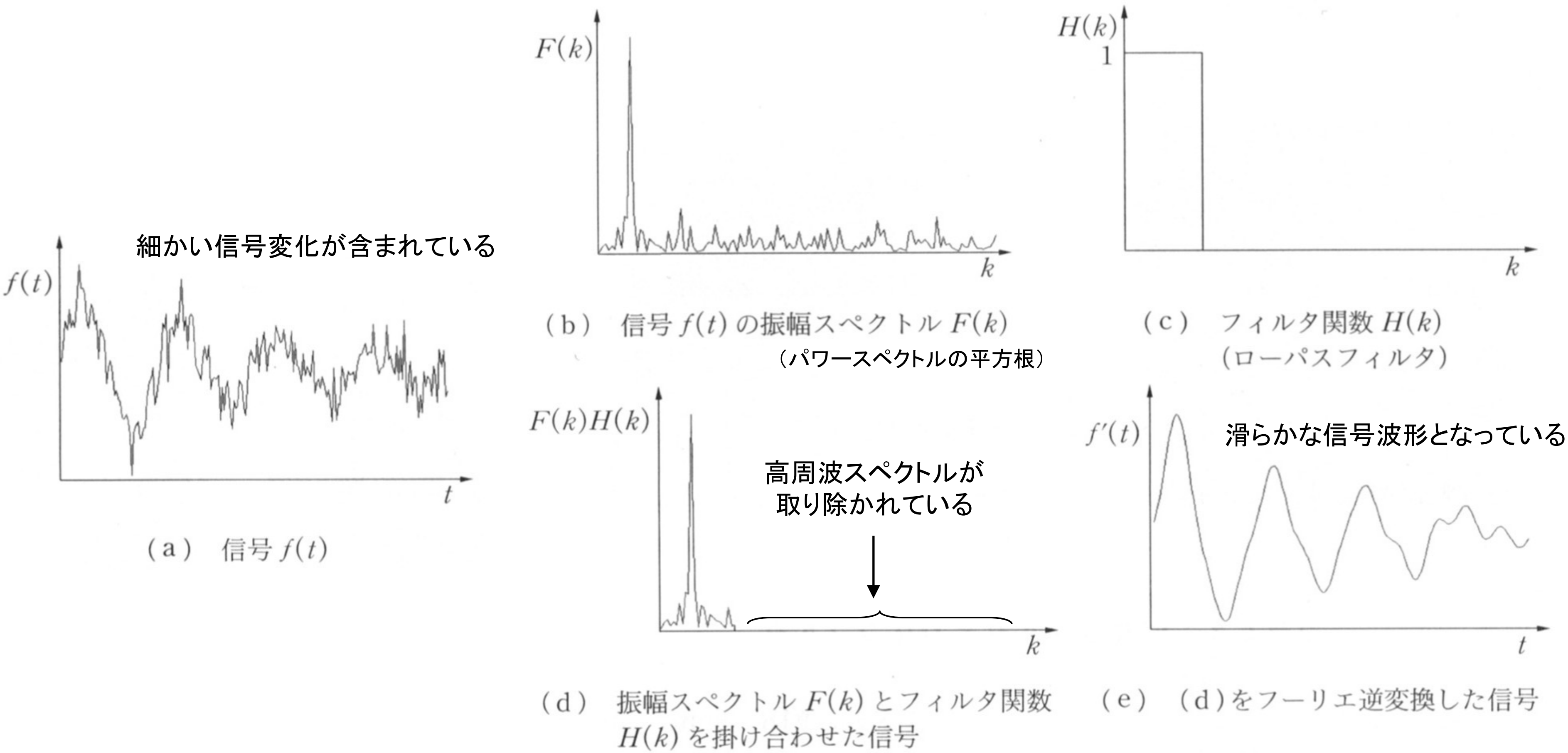
$$\left|F(k, l)\right| = \mathrm{Re}\left(F(k, l)\right)^2 + \mathrm{Im}\left(F(k, l)\right)^2$$

位相スペクトル

$$e^{j\varphi(k, l)} = \frac{F(k, l)}{\left|F(k, l)\right|} \quad \text{or} \quad \varphi(k, l) = \tan^{-1}\left\{\frac{\mathrm{Im}\left(F(k, l)\right)}{\mathrm{Re}\left(F(k, l)\right)}\right\}$$

画像の周波数スペクトル

- 周波数スペクトルの基礎概念



（a） 信号 $f(t)$

（b） 信号 $f(t)$ の振幅スペクトル $F(k)$

（c） フィルタ関数 $H(k)$
（ローパスフィルタ）

（d） 振幅スペクトル $F(k)$ とフィルタ関数 $H(k)$ を掛け合わせた信号

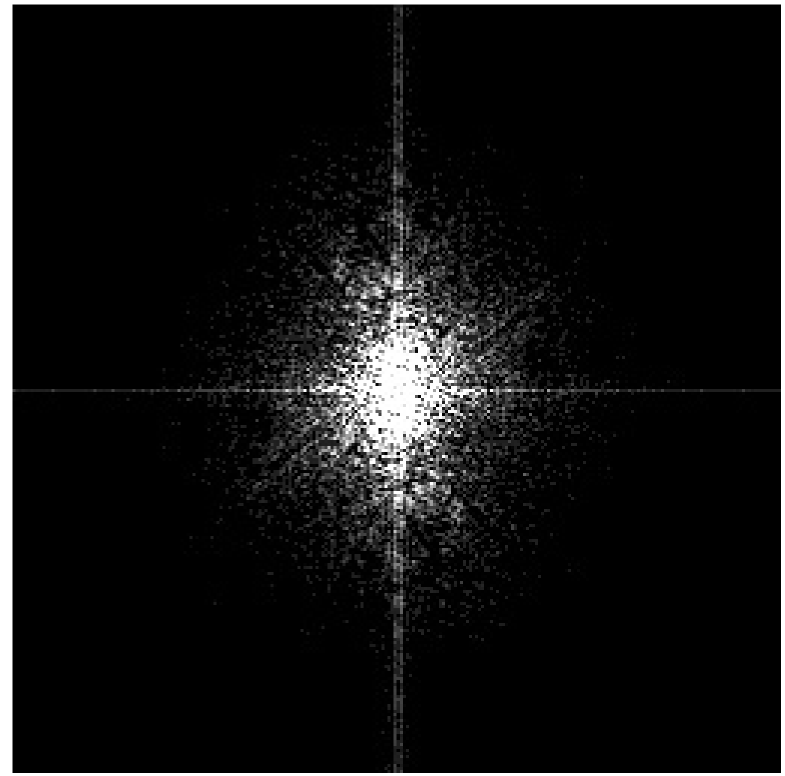
（e） （d）をフーリエ逆変換した信号

すなわち，細かい濃淡変化の成分は高周波スペクトルに対応する
逆に，滑らかな濃淡変化の成分は低周波スペクトルに対応する

画像の空間周波数特徴

- 画像の空間周波数スペクトル

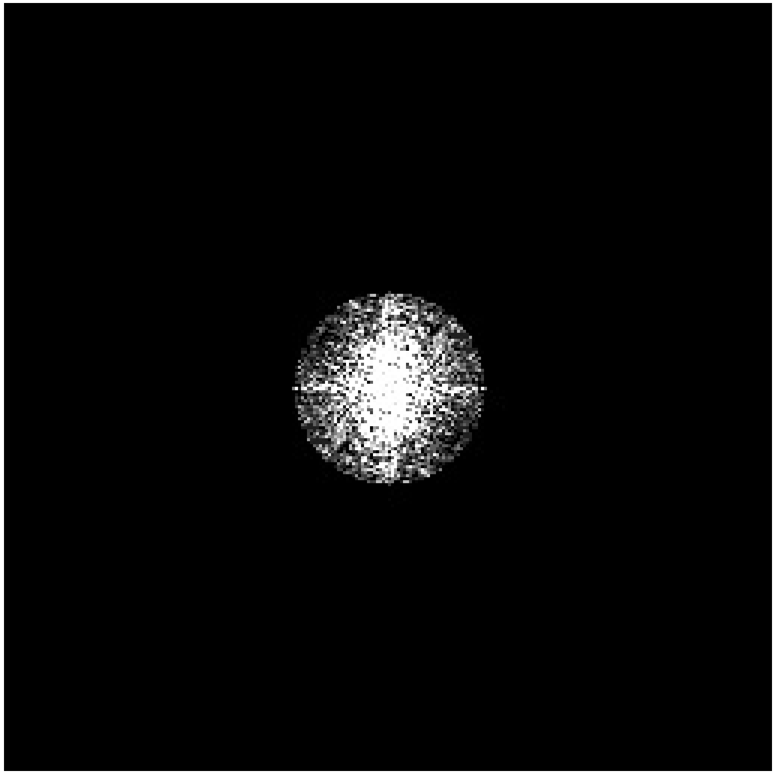
フーリエ変換



オリジナル画像　　　　パワースペクトル

画像の空間周波数特徴

- 低周波数スペクトル特徴



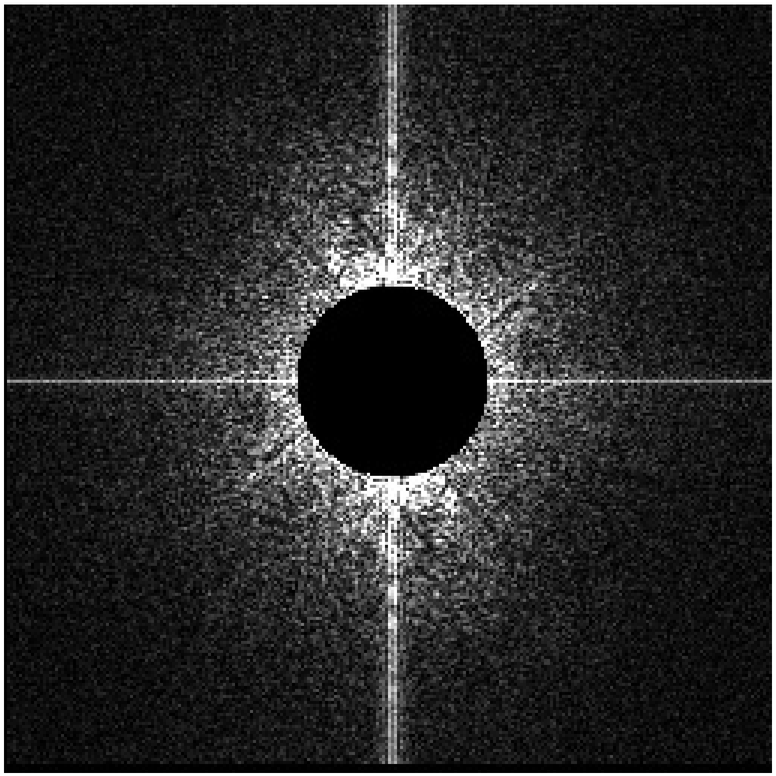
逆フーリエ
変換

低周波成分だけを残す

滑らかな濃淡変化だけ残る
（変化が急なところも滑らかに）

画像の空間周波数特徴

- 高周波数スペクトル特徴



逆フーリエ変換

高周波成分だけを残す

急な，細かい濃淡変化のところだけ残る（滑らかな変化がなくなる）

画像の空間周波数特徴によるデータ圧縮

- 周波数スペクトルを利用した画像圧縮
  - 画像データの空間周波数

    ⇒低周波領域にスペクトルが偏って現れる傾向がある
  - 人間の視覚

    ⇒空間周波数の高い濃淡の変化に鈍感
  - 圧縮方法
    - 低周波スペクトルに短いビット長の符号，高周波スペクトルに長いビット長の符号を割り当てる
    - 高周波領域のスペクトルを切り捨てる

不可逆圧縮